Ausgabe 2008-05

Einführung in das Rechnen mit Zahlen

(elementare Algebra)

Algebra ist ein Teilgebiet der Mathematik
und beschäftigt sich mit der Verknüpfung von Zahlen durch Rechenoperationen

1. Rechenregeln der natürlichen Zahlen

1.1. Zahlenbegriff und Zahlenbereich der natürlichen Zahlen

Das Ziffernsystem auf der Grundlage der Zahl 10 hat eine besonders große Verbreitung gefunden, vermutlich durch das primitive Abzählen von Sachen unter Verwendung der 10 Finger. Es gibt zehn Ziffern, alle anderen Zahlen sind aus diesen zehn Ziffern zusammengesetzt.

Zahlensymbol = Ziffer	deutsches Zahlwort
0	null
1	eins
2	zwei
3	drei
4	vier

Zahlensymbol = Ziffer	deutsches Zahlwort
5	fünf
6	sechs
7	sieben
8	acht
9	neun

Die Angabe von mehreren Ziffern ist ein Zahlensymbol, kurz Zahl genannt. Die unmittelbar aufeinander folgenden Ziffern haben den Stellenwert 10:1.
Bei großen Zahlen wird von rechts nach links zur besseren Lesbarkeit nach jeder dritten Stelle ein kleiner Zwischenraum gelassen. Punkte oder Kommas zur besseren Lesbarkeit sind nicht erlaubt. Beispiel: 5 987 654

Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger, welcher ebenfalls eine natürliche Zahl ist.
Beispiel: Für die Zahl sieben ist die Zahl acht der Nachfolger.
Jede natürliche Zahl (außer die Zahl null) hat einen Vorgänger, welcher ebenfalls eine natürliche Zahl ist. Beispiel: Die Zahl sieben ist der Vorgänger der Zahl acht.

Wird die Zahl null als natürliche Zahl betrachtet, so hat diese als einzige natürliche Zahl keinen Vorgänger und ist damit die kleinste natürliche Zahl.

Die Menge der natürlichen Zahlen ist unendlich groß.

1.2. Addition

Erster Summand plus zweiter Summand gleich Summe

Beispiel: Zwei Äpfel liegen da. Drei Äpfel werden dazugetan. Man erhält fünf Äpfel.
In der Mathematik wird das wie folgt geschrieben: $2 + 3 = 5$.
Liegen nun drei Äpfel da und werden zwei Äpfel dazu getan, erhält man ebenfalls fünf Äpfel. Mathematische Schreibweise: $3 + 2 = 5$.

Vertauscht man den ersten mit dem zweiten Summanden, erhält man in der Rechenaufgabe das gleiche Ergebnis. Das bedeutet:

Kommutationsgesetz (Vertauschungsgesetz) für die Addition
$a + b = b + a$
Summanden sind vertauschbar.

Beispiel: $2 + 3 = 5$ und $3 + 2 = 5$

1.3. Subtraktion

Minuend minus Subtrahend gleich Differenz

Für das Rechnen mit natürlichen Zahlen muss der Minuend stets größer oder gleich groß wie der Subtrahend sein. Als Folge dieser Einschränkung können Minuend und Subtrahend nicht getauscht werden, um die gleiche Differenz zu erhalten.

Beispiel: Acht Äpfel liegen da. Es werden zwei Äpfel entfernt. Es liegen noch sechs Äpfel da. Mathematische Formulierung: $8 - 2 = 6$.
Es liegen zwei Äpfel da. Kann man jetzt acht Äpfel wegnehmen? Mit natürlichen Zahlen ist diese Aufgabe nicht lösbar, denn die Natur kann keine Schulden machen und sich Äpfel ausleihen.

1.4. Multiplikation

erster Faktor mal zweiter Faktor gleich Produkt

Beispiel: Jeder von drei Schülern soll 2 Äpfel bekommen. Ich benötigte sechs Äpfel. Mathematisch ließe sich das wie folgt formulieren: $2 + 2 + 2 = 6$. Bei zwanzig Schülern wird die Aufgabe etwas lang und umständlich. Da alle Schüler die gleiche Anzahl Äpfel bekommen sollen, kann man das zusammenfassen:
$3 \cdot 2 = 6$

Beispiel: Sollen zwei Schüler jeweils drei Äpfel bekommen, braucht man ebenfalls sechs Äpfel: $2 \cdot 3 = 6$. Bei Multiplikationen können die Faktoren getauscht werden.

Kommutationsgesetz (Vertauschungsgesetz) für die Multiplikation
$a \cdot b = b \cdot a$
Faktoren sind vertauschbar.

Beispiel: $2 \cdot 3 = 6$ und $3 \cdot 2 = 6$

1.5. Division

Dividend durch Divisor gleich Quotient

Beispiel: Zwölf Äpfel sollen gleichmäßig auf vier Schüler aufgeteilt werden. Jeder Schüler erhält drei Äpfel. Mathematische Formulierung: $12 : 4 = 3$.

Für das Rechnen mit natürlichen Zahlen muss der Dividend ein Vielfaches des Divisors oder gleich groß wie der Divisor sein, sonst wäre die Aufgabe im Bereich der natürlichen Zahlen nicht lösbar. Oft gibt man auch den nicht verwendeten Rest an.

Beispiel: 14 Äpfel sollen auf vier Schüler gleichmäßig verteilt werden. Jeder Schüler erhält drei Äpfel. Zwei Äpfel bleiben übrig. Mathematisch wird wie folgt formuliert: $14 : 4 = 3$ Rest 2

2. Primzahlen, Teilbarkeit natürlicher Zahlen, g.g.T., k.g.V.

Jede natürliche Zahl (außer null und eins) ist durch eins und durch sich selbst teilbar. Diese Teiler heißen **triviale Teiler**.

Ist eine natürliche Zahl durch andere natürliche Zahlen teilbar und ergibt die Division wiederum eine natürliche Zahl, so nennt man diese **echte Teiler**. Echte Teiler können nur aus Primzahlen oder aus Primzahlen und zusammengesetzten Zahlen (s.u.) bestehen.

Beispiel: 8 triviale Teiler: 1 und 8 echte Teiler: 2 und 4

Teilbarkeit von Zahlen beachte auch Teilbarkeitsregeln (siehe Formelsammlung Mathe)

Zahlen, welche keine echten Teiler besitzen, nennt man **Primzahlen**. Primzahlen sind nur durch 1 und durch sich selbst teilbar. Die Zahl 1 zählt nicht zu den Primzahlen.

Schema zur Ermittlung der Primzahlen
Vor 2200 Jahren wendete der griechische Gelehrte ERATOSTHENES folgendes Schema zur Ermittlung der Primzahlen an:
(Beispiel) Eine Liste mit der Folge der natürlichen Zahlen ab zwei.
1. Die erste Zahl ist die zwei. Alle Vielfachen von zwei werden gestrichen: 4; 6; 8; 10; ...
2. Die nächste Zahl ist die drei. Alle Vielfachen von drei werden gestrichen: 6; 9; 12; 15;...
3. Die nächste Zahl ist die fünf.(Die vier wurde bereits gestrichen.) Alle Vielfachen von fünf werden gestrichen (falls nicht bereits geschehen): 10; 15; 20; 25; 30; ...
4. Die nächste Zahl ist die sieben. (Die Zahl sechs wurde bereits gestrichen.) Alle Vielfachen von sieben werden gestrichen, soweit nicht bereits geschehen: 14; 21; 28; 35;...
5. Die nächste Zahl ist Zahl elf. (Die Zahlen acht, neun, zehn wurden bereits gestrichen) Alle Vielfachen von elf .... usw.

Die Zahlen, welche "durch das Sieb fallen" und übrig bleiben, nennt man Primzahlen.
Diese Methode ist als "das Sieb des ERATHOSTHENES" in der Mathematik weit bekannt.

Für die Zahlen bis 100 ergeben sich folgende **Primzahlen**:

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97

Die Primzahlen sind zwar eine Teilmenge der natürlichen Zahlen, aber die Menge der Primzahlen ist ebenfalls unendlich groß.

Zusammengesetzte Zahlen sind als Produkt aus mindestens zwei Primzahlen aufzufassen.

Beispiel: Zerlegung einer Zahl in Primfaktoren
Man beginnt mit der kleinsten möglichen Primzahl und trennt diese Schritt für Schritt ab, bis keine zusammengesetzte Zahl mehr vorhanden ist.

$$\begin{aligned} 1248 &= 2 \cdot 624 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 312 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 156 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 78 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 39 \\ &= \underline{\underline{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1246 &= 2 \cdot 623 \\ &= \underline{\underline{2 \cdot 7 \cdot 89}} \end{aligned}$$

Größter gemeinsamer Teiler (g.g.T.)

Der g.g.T. ist das Produkt aus den Primfaktoren, die in allen Zahlen gemeinsam vorkommen. Diese gemeinsam vorkommenden Primfaktoren werden einmal zum Ansatz gebracht.

Beispiel:

$$\begin{array}{rcccccccl} 36 & = & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 3 & \cdot & 3 \\ 126 & = & 2 & \cdot & & & 3 & \cdot & 3 \cdot 7 \end{array}$$

$2 \cdot 18 = 36$
$7 \cdot 18 = 126$

$$\text{g.g.T.} = 2 \cdot 3 \cdot 3 = \underline{\underline{18}}$$

Die nicht benötigten Primfaktoren geben an, wie oft der g.g.T. in der betreffenden Zahl enthalten ist.

Um den g.g.T. zweier großer Zahlen zu ermitteln, benutzt man den EUKLIDischen Algorithmus: Man dividiert die größere Zahl durch die kleinere Zahl. Nun wird die kleinere Zahl durch den soeben erhaltenen Rest dividiert. Der ursprüngliche Resr wird durch den soeben erhaltenen Rest dividiert. Diese Rechnung wird fortgesetzt, bis die Division restlos aufgeht. Der letzte Divisor ist der g.g.T. der beiden Zahlen.

Beispiel: g.g.T. der Zahlen 768 und 1360

1360 : 768 = 1 Rest 592
768 : 592 = 1 Rest 176
592 : 176 = 3 Rest 64
176 : 64 = 2 Rest 48
64 : 48 = 1 Rest 16
48 : $\underline{\underline{\mathbf{16}}}$ = 3

Der g.g.T. von 768 und 1360 lautet $\underline{\underline{16}}$.

Kleinstes gemeinsames Vielfaches (k.g.V.)

Das k.g.V. ist das Produkt aus allen vorhanden Primfaktoren. Die Primfaktoren, welche in mehreren Zahlen gleichzeitig enthalten sind, kommen nur einmal als Faktor zur Anwendung.

Beispiel:

$$\begin{array}{rcccccccl} 36 & = & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 3 & \cdot & 3 \\ 126 & = & 2 & \cdot & & & 3 & \cdot & 3 \cdot 7 \end{array}$$

$7 \cdot 36 = 252$
$2 \cdot 126 = 252$

$$\text{k.g.V.} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = \underline{\underline{252}}$$

Die "gedachten Faktoren in den Lücken" geben an, wie oft die betreffende Zahl im k.g.V. enthalten ist.

3. Rechenregeln der ganzen Zahlen

Der Zahlenbereich der ganzen Zahlen besteht aus den negativen ganzen Zahlen, der Zahl Null und den positiven ganzen Zahlen, welche als natürliche Zahlen bereits bekannt sind.

Die Menge der ganzen Zahlen ist unendlich groß.

Positive ganze Zahlen haben ein + als Vorzeichen. Beim Rechnen kann das + weggelassen werden, die positiven ganzen Zahlen können wie natürliche Zahlen behandelt werden. Die negativen ganzen Zahlen haben ein - als Vorzeichen, dieses darf niemals weggelassen werden. Um die Vorzeichen + und - von den Rechenoperationen Addition und Subtraktion unterscheiden zu können, dürfen Klammern verwendet werden.

Beispiel: (+7) + (-4) = (+3)

Zu jeder positiven oder negativen Zahl gibt es eine weitere Zahl, welche sich nur durch das Vorzeichen unterscheidet. Die beiden Zahlen bezeichnet man als **entgegengesetzte Zahlen**.
Der (absolute) **Betrag einer** ganzen positiven **Zahl** ist die Zahl selbst. Der (absolute) Betrag einer ganzen negativen Zahl ist die entgegengesetzte Zahl. Somit haben entgegengesetzte Zahlen den gleichen Betrag. Sonderfall: |0| = 0
Beispiele: |+7| = +7 = 7 sprich: Betrag von +7 gleich 7
|-4| = +4 = 4 sprich: Betrag von -4 gleich 4

Vorzeichenregeln

Addition nur positiver ganzer Zahlen	(+a) + (+b) = +(a+b)
Addition nur negativer ganzer Zahlen	(-a) + (-b) = -(a+b)
Addition positiver und negativer Zahlen	wenn a>b dann gilt: (+a) + (-b) = +(a-b) wenn a<b dann gilt: (+a) + (-b) = -(b-a)
Subtraktion positiver und negativer Zahlen (die Zahlen werden subtrahiert, in dem man die jeweils entgegengesetzte Zahl addiert)	(+a) - (-b) = (+a) + (+b) (+a) - (+b) = (+a) + (-b)
Multiplikation positiver und negativer ganzer Zahlen	(+a) · (+b) = +(a · b) (-a) · (-b) = +(a · b) (+a) · (-b) = -(a · b) (-a) · (+b) = -(a · b)
Division positiver und negativer ganzer Zahlen *	(+a) : (+b) = +(a : b) (-a) : (-b) = +(a : b) (+a) : (-b) = -(a : b) (-a) : (+b) = -(a : b)

* Hinweise: Das Ergebnis der Division ist nur dann eine ganze Zahl, wenn a ein Vielfaches von b ist. Ebenso darf b nicht null sein.

4. Rechnen mit der Zahl Null

Addition und Subtraktion

$a + 0 = a$
$0 + a = a$
$a - 0 = a$
$0 - a = -a$

Sonderfall: $0 + 0 = 0$
$0 - 0 = 0$

Multiplikation

$a \cdot 0 = 0$
$0 \cdot a = 0$

Sonderfall: $0 \cdot 0 = 0$

Division

$0 : a = 0$ a darf nicht 0 sein

$a : 0$ ist nicht definiert und auch nicht ausführbar

5. Bruchrechnung

Ein in der Form $\frac{a}{b}$ geschriebenes Paar natürlicher Zahlen a und b wird (gemeiner) Bruch genannt. b darf nicht null sein.

Bruch $\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$

Zähler < Nenner	echter Bruch
Zähler > Nenner	unechter Bruch
Zähler = 1	Stammbruch

Erweitern, Kürzen von Brüchen

Man erweitert einen Bruch, indem man Zähler und Nenner mit der gleichen natürlichen Zahl (außer null) multipliziert. Ein Bruch kann immer erweitert werden.

Man kürzt einen Bruch, indem man Zähler und Nenner durch einen gemeinsamen Teiler dividiert. Das Kürzen durch eins verändert den Bruch nicht. Das Kürzen durch null ist definiert.

Gleichnamige Brüche

Gleichnamige Brüche besitzen den gleichen Nenner, Brüche mit verschiedenen Nennern sind ungleichnamig. Durch zweckmäßige Erweiterung können Brüche gleichnamig gemacht werden.

Das k.g.V. der Nenner mehrerer Brüche wird Hauptnenner genannt.

Reziproke (Kehrwert) **eines Bruches**

Das Reziproke des Bruches $\frac{a}{b}$ lautet: $\frac{b}{a}$.

Addition von Brüchen

Brüche werden addiert, indem man bei gleichnamigen Brüchen nur die Zähler addiert. Ungleichnamige Brüche müssen vor der Addition erst gleichnamig gemacht werden.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$ b darf nicht null sein

Beispiel: $$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{b\cdot c}{b\cdot d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$$ b und d dürfen nicht null sein

Beispiel: $$\frac{2}{5}+\frac{3}{7}=\frac{14}{35}+\frac{15}{35}=\frac{29}{35}$$

Multiplikation von Brüchen

Brüche werden multipliziert, indem man jeweils die Zähler und die Nenner der Brüche multipliziert.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Beispiel : $$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{6}{35}$$

Subtraktion von Brüchen

Brüche werden subtrahiert, indem man bei gleichnamigen Brüchen nur die Zähler subtrahiert. Ungleichnamige Brüche müssen vor der Subtraktion erst gleichnamig gemacht werden.

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$ b darf nicht null sein
a muss gleich oder größer als c sein

Beispiel: $$\frac{5}{7}-\frac{3}{7}=\frac{2}{7}$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}-\frac{b\cdot c}{b\cdot d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}$$ b und d dürfen nicht null sein

Beispiel: $$\frac{3}{7}-\frac{2}{5}=\frac{15}{35}-\frac{14}{35}=\frac{1}{35}$$

Division von Brüchen

Brüche werden dividiert, indem man den Dividenden mit dem Reziproken (Kehrwert) des Divisors multipliziert. Die Division durch null ist nicht erlaubt.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$ b und c und d dürfen nicht null sein

Beispiel: $$\frac{2}{5}:\frac{3}{7}=\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{3}=\frac{14}{15}$$

6. Dreisatz, Prozentrechnung, Zinsrechnung

6.1. Dreisatz

Mit einem Dreisatz bestimmt man aus drei bekannten Größen eine vierte unbekannte Größe, wenn die Größen proportional sind. Dabei wird von mehreren Einheiten auf den Wert einer Einheit geschlossen, dann wird wieder der neue Wert einer Mehrheit ermittelt.

direkter Dreisatz	indirekter Dreisatz	doppelter Dreisatz (erweiterter Dreisatz)
Größen direkt proportional	Größen indirekt proportional	aus fünf bekannten Größen wird eine sechste Größe ermittelt

direkter Dreisatz

Beispiel: 5 kg Kartoffeln kosten 2,00 €. Wieviel kosten 3 kg Kartoffeln?

1 kg Kartoffeln kosten $\frac{2\,€}{5\,\text{kg}} = 0{,}40\,€$

3 kg Kartoffeln kosten 3 · 0,40 € = 1,20 €.

indirekter Dreisatz

Beispiel: Für ein Bauwerk benötigen 10 Arbeiter 20 Tage, wie lange benötigen 16 Arbeiter?

10 Arbeiter · 20 Tage = 1 Arbeiter · 200 Tage

200 Tage : 16 Arbeiter = 12,5 Tage

doppelter Dreisatz

Beispiel: 5 Maschinen produzieren in 10 Tagen 200 Teile, wieviele Maschinen produzieren in 2 Tagen 160 Teile ?

200 : 10 : 5 = 160 : 2 : x   x = 20 Maschinen

6.2. Prozentrechnung

Mit Hilfe der Prozentrechnung lassen sich Verhältnisse sehr einfach vergleichen.
Der Begriff Prozent stammt aus dem Lateinischen: pro centum und heißt wörtlich: für Hundert, frei übersetzt bedeutet das: Hundertstel.
1 Prozent einer Zahl ist 1 Hundertstel dieser Zahl. Für Prozent wird häufig das Symbol % verwendet.

$$\frac{P}{p} = \frac{G}{100}$$

P Prozentwert
p Prozentsatz in %
G Grundwert

Berechnung des Grundwertes	Berechnung des Prozentsatzes	Berechnung des Prozentwertes
$G = \frac{P \cdot 100}{p}$	$p = \frac{P \cdot 100}{G}$	$P = \frac{G \cdot p}{100}$

Beispiel 1: Wieviel € sind 3 % von 200 € ?

Berechnung des Prozentwertes: $P = \frac{G \cdot p}{100} = \frac{200\,€ \cdot 3\,\%}{100\,\%} = 6\,€$

Beispiel 2: 6 € sind 3 % von welchem Grundwert ?

Berechnung des Grundwertes: $G = \frac{P \cdot 100}{p} = \frac{6\,€ \cdot 100\,\%}{3\,\%} = 200\,€$

Beispiel 3: Wieviel % sind 6 € von 200 € ?

Berechnung des Prozentsatzes: $p = \frac{P \cdot 100}{G} = \frac{6\,€ \cdot 100\,\%}{200\,€} = 3\,\%$

6.3. Zinsrechnung

Zinsen sind Vergütungen für das Bereitstellen von Geldanlagen über bestimmte Zeiträume.

$$\text{Zinsen} = \frac{\text{Geldbetrag} \cdot \text{Zinssatz } \%}{100\ \%}$$

Der Zinssatz wird oft für den Zeitraum von einem Jahr angegeben.

Beispiel: Wieviel Zinsen erhält man, wenn ein Kapital von 600 € mit einem Jahreszinsatz von 4 % für die Dauer von 10 Monaten verzinst wird ?

$$\text{Zinsen} = \frac{600\,€ \cdot 4\,\%}{100\,\%} \cdot \frac{10\,\text{Monate}}{12\,\text{Monate}} = 20\,€$$

7. Rechenregeln der reellen Zahlen (Potenzen, Wurzeln, Logarithmen)

7.1. Potenzrechnung, Potenzieren (Potenzgesetze siehe Formelsammlung)

Unter einer Potenz a^b (sprich: a hoch b) versteht man ein Produkt aus gleichen Faktoren a mit der Anzahl b.

$$a^b = c$$

a^b	Potenz
a	Basis (Grundzahl)
b	Exponent (Hochzahl)
c	Potenzwert

Beispiel: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Bei positiver Basis ist der Potenzwert immer positiv.	$(+a)^{2n} = +a^{2n}$ (gerader Exponent) $(+a)^{2n+1} = +a^{2n+1}$ (ungerader Exponent)
Bei negativer Basis ist der Potenzwert bei geraden Exponenten positiv.	$(-a)^{2n} = +a^{2n}$ (gerader Exponent)
Bei negativer Basis ist der Potenzwert bei ungeraden Exponenten negativ.	$(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$ (ungerader Exponent)
Alle Quadrate sind positiv.	$(+a)^2 = (-a)^2 = +a^2$
Addition und Subtraktion von Potenzen ist nur bei gleicher Basis und gleichen Exponenten möglich.	$m \cdot a^2 + n \cdot a^2 = (m+n) \cdot a^2$
Multiplikation und Division von Potenzen ist möglich, bei gleicher Basis oder bei gleichen Exponenten.	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^m : a^n = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ $a^m : b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^2$
Potenzieren von Potenzen erfolgt durch Multiplikation der Exponenten, unter Beibehaltung der Basis	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Sonderfälle: $a^1 = a$ $a^0 = 1$

7.2. **Wurzelrechnung, Radizieren** (Wurzelgesetze siehe Formelsammlung)

$\sqrt[a]{b} = c$ Der Ausdruck vor dem Gleichheitszeichen wird als Wurzel bezeichnet. Es ist die a-te Wurzel aus b.
a Wurzelexponent
b Radikand (darf nicht negativ sein)
c Wurzelwert

Das Radizieren kann als eine Umkehrrechenart des Potenzierens angesehen werden.

$\sqrt[2]{36} = 6$ weil: $6^2 = 36$

Bei Quadratwurzeln bzw. bei der 2-ten Wurzel aus ..., kann der Wurzelexponent 2 weggelassen werden.

$\sqrt[2]{b} = \sqrt{b}$

$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$ weil: $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{8}{27}$

Beachte: $\sqrt[a]{b^a} = b$

$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$ weil: $2^4 = 16$

<u>Wurzeln als Potenzen mit gebrochenem Exponenten</u>

$\sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}$ $\sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}}$

7.3. Logarithmieren

Das Logarithmieren kann als Gegenoperation zum Potenzieren angesehen werden.

$\log_a b = c$ Der Ausdruck vor dem Gleichheitszeichen wird als Logarithmus bezeichnet.
a Basis
b Logarithmand, oder auch: Numerus
c Logarithmuswert

Beispiel: $\log_6 36 = 2$ weil: $6^2 = 36$

Die Logarithmuswerte können als die Exponenten der dazugehörigen Potenzen aufgefasst werden.

Beispiele
$\log_2 16 = 4$ weil: $2^4 = 16$
$\log_6 36 = 2$ weil: $6^2 = 36$

<u>dekadische Logarithmen</u> = Logarithmen der Basis 10

Beachte: $\log_{10} a = \lg a$ Beispiel: $\lg 1000 = 3$ weil: $10^3 = 1000$

Die Logaritmuswerte, welche zu den Logarithmanden von 1 bis kleiner 10 gehören, heißen Mantissen.

lg 1	=	0
...		...
lg 9,999...	=	0, ...

Die Ganzzahlen der Logaritmuswerte heißen Kennzahlen.

lg 10 ... lg 99,999 ...	=	1, ...	weil: $10^1 = 10$
lg 100 ... lg 999,999 ...	=	2, ...	weil: $10^2 = 100$
lg 1000 ... lg 9999,999 ...	=	3, ...	weil: $10^3 = 1000$
lg 10 000 ... lg 99 999,999 ...	=	4, ...	weil: $10^4 = 10\,000$

Die Kennzahlen für Logarithmanden zwischen 0 und 1 lauten:

lg 0,1 ... lg 0,9999 ...	=	0, ... - 1	weil: $10^{-1} = 0{,}1$
lg 0,01 ... lg 0,09 999 ...	=	0, ... - 2	weil: $10^{-2} = 0{,}01$
lg 0,001 ... lg 0,009 999 ...	=	0, ... - 3	weil: $10^{-3} = 0{,}001$

<u>natürliche Logarithmen</u> = Logarithmen der Basis e (Eulersche Zahl)

Beachte: $\log_e a = \ln a$ (ln = logarithmus naturalis)