Ausgabe 2007-09

Analysis

(Differentialrechnung und Integralrechnung)

Ableitungsregeln für Funktionen
Das unbestimmte Integral

Ableitungsregeln für Funktionen

Name	Funktion	Ableitung
Lineare Funktion-Regel	$f(x) = m \cdot x + b$ $f(x) = x$	$f'(x) = m$ $f'(x) = 1$
Konstanten-Regel	$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
Potenzregel (Hut-ab-Regel)	$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
Faktor-Potenzregel	$f(x) = a \cdot x^n$	$f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$
Funkt.- u. Konst.regel	$f(x) = g(x) + c$	$f'(x) = g'(x)$
Summenregel	$f(x) = g(x) \pm h(x)$	$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
Faktorregel	$f(x) = c \cdot v(x)$	$f'(x) = c \cdot v'(x)$
Produktregel	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
Quotientenregel	$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$
Wurzelfunktionsregel	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{(2 \cdot \sqrt{x})}$
Exponentialfunktionsregel	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
(natürl.) Logarithmusfunktionsregel	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
Kettenregel	$f(x) = g[h(x)]$	$f'(x) = g'[h(x)] \cdot h'(x)$

$y = g[h(x)]$ ist eine aus $g(h)$ und $h(x)$ zusammengesetzte Funktion

weitere Ableitungen

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad f'(x) = -\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad f'(x) = -n \cdot x^{(-n-1)} = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

Sonderfälle

$$f(x) = a^x \qquad f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

$$f(x) = a^{g(x)} \qquad f'(x) = a^{g(x)} \cdot g'(x) \cdot \ln a$$

$$f(x) = g(x)^{h(x)} \qquad f'(x) = g(x)^{h(x)} \cdot (h'(x) \cdot \ln g(x) + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$f(x) = x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x * \ln x} \qquad f'(x) = e^{x * \ln x} \cdot (\ln x + 1)$$

(Beachte: Jede positive Zahl ist als Potenz zur Basis e darstellbar! Also: $x = e^{\ln x}$)

Das unbestimmte Integral

... ermittelt aus der Kenntnis der ersten Ableitung f' die zugehörige Original- oder Stammfunktion f, also die Umkehrung des aus der Differentialrechnung bekannten Ableitungsprozesses.
Die **Grundintegrale** ergeben sich aus der Ableitungstabelle auf Seite 2 durch "rückwärtslesen".

$$\int b \, dx = bx + C \qquad \int 0 \, dx = C$$

C = Konstante

a, b, c, m, n = Zahlen

x = Variable

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (a>0;\; a\neq 1)$$

$$\int (ax+b)^n \, dx = \frac{1}{a} * \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C \quad \text{wenn } x > 0$$
$$= \ln(-x) + C \quad \text{wenn } x < 0$$

$$\int \frac{1}{x-a} \, dx = \ln|x-a| + C$$

$$\int \frac{1}{x^n} \, dx = -\frac{1}{(n-1)*x^{n-1}} + C \qquad n > 1;\; x \neq 0$$

$$\int \frac{1}{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} * \ln(ax+b) + C \quad \text{wenn } ax + b > 0;\; a\neq 0$$

$$= \frac{1}{a} * \ln(-ax-b) + C \quad \text{wenn } ax + b < 0;\; a\neq 0$$

$$\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{1/2} \, dx = \frac{2}{3} * \sqrt{x^3} + C$$

$$\int \sqrt[n]{x^m} \, dx = \frac{n}{m+n} * \sqrt[n]{x^{m+n}} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = 2*\sqrt{x} + C$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int e^{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} * e^{ax+b} + C \qquad a\neq 0$$

$$\int \ln x \, dx = x * \ln x - x + C$$

$$\int \frac{(\ln x)^n}{x} \, dx = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 \pm x^2}}{x} \, dx = \sqrt{a^2 \pm x^2} - a * \ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2 \pm x^2}}{x}\right| + C \qquad x < a \text{ für Vorzeichen "-"}$$

$$\int \frac{x^{n-1}}{x^n + a} \, dx = \frac{1}{n} * \ln|x^n + a| + C$$

$$\int e^{-0,1t} \, dt = -10 * e^{-0,1t} + C$$

$$\int (2x)^4 \, dx = \frac{1}{2} * \frac{(2x)^5}{5} + C$$

Rechenregeln

Integration einer mit einem konstanten Faktor multilpizierten Funktion f

$$\int C * f(x)\ dx = C * \int f(x)\ dx$$

Integration einer Summe zweier Funktionen

$$\int [f(x) \pm g(x)]\ dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx$$

$$\int [a * f(x) \pm b * g(x)]\ dx = a * \int f(x)\ dx \pm b * \int g(x)\ dx$$