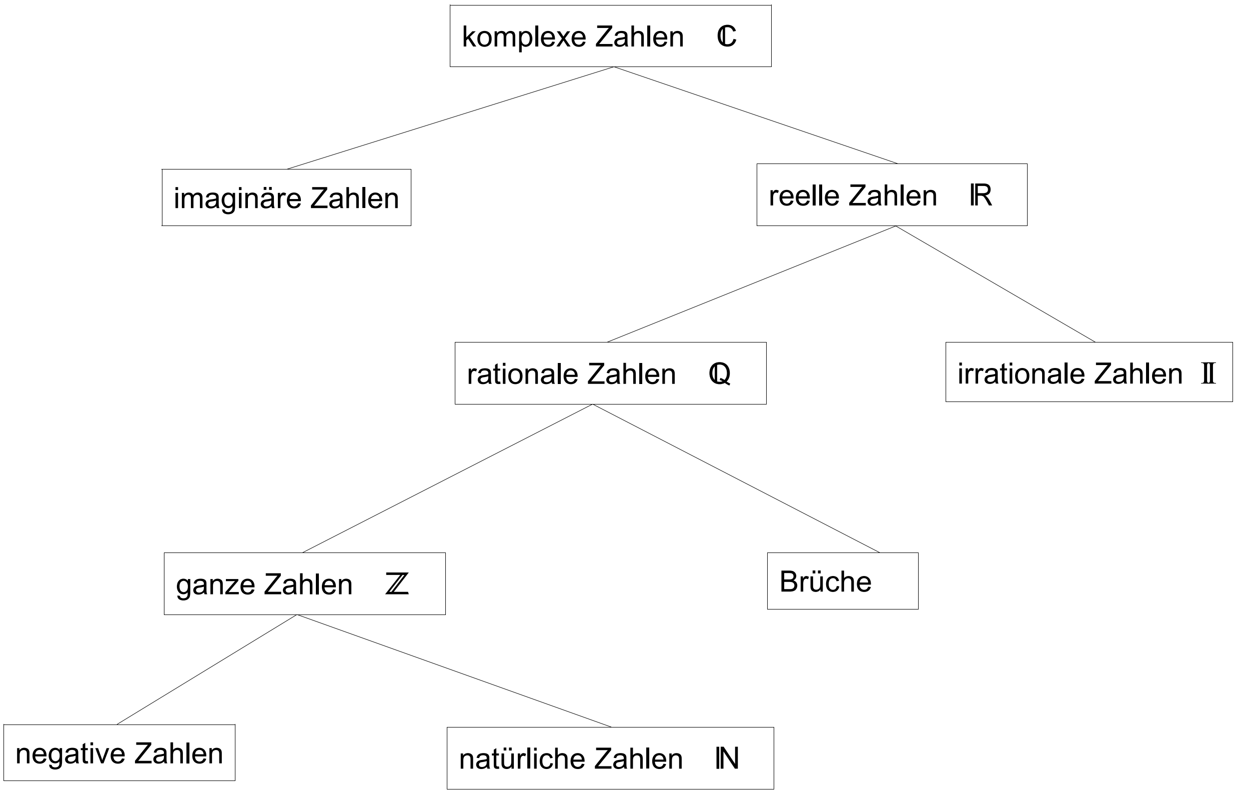
Formelsammlung

Grundlagen der Mathematik

Ausgabe 2007-08

Stichwortverzeichnis (mit Seitenzahlen)

Zahlenbereiche



natürliche Zahlen	$\mathbb{N} = \{1;2;3;4;5;6;7;...\}$
natürliche Zahlen und 0	$\mathbb{N}_0 = \{0;1;2;3;4;5;6;7;...\}$
ganze Zahlen	$\mathbb{Z} = \{...;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5;...\}$
positive ganze Zahlen	$\mathbb{Z}^+ = \{1;2;3;4;5;6;7;...\}$
nichtnegative ganze Zahlen	$\mathbb{Z}_0^+ = \{0;1;2;3;4;5;6;7;...\}$
rationale Zahlen	$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z};\ b \in \mathbb{Z};\ b \neq 0 \right\}$

Formeln der Arithmetik

Kommutatives Gesetz $a+b=b+a$ $a \cdot b=b \cdot a$

Distributives Gesetz $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$

Assoziatives Gesetz $(a+b)+c=a+(b+c)$ $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$

Vorzeichenregeln

$a+(-b)=a-b$ $a-(-b)=a+b$ $a \cdot (-b)=-a \cdot b$

$(-a) \cdot (-b)=a \cdot b$ $(-a) \cdot b=-a \cdot b$ $(-a) \div b=-\dfrac{a}{b}$

$a \div (-b)=-\dfrac{a}{b}$ $(-a) \div (-b)=\dfrac{a}{b}$

Rechnen mit Null $a \cdot 0=0$ $0 \div a=0$ Division durch 0 verboten.

Produkte algebraischer Summen, Binome

$(a \pm b)^0=1$ $(a+b) \cdot (c+d)=ac+ad+bc+bd$

$(a \pm b)^1=a \pm b$ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$(a \pm b)^2=a^2 \pm 2ab+b^2$ $a^2-b^2=(a+b) \cdot (a-b)$

$(a \pm b)^3=a^3 \pm 3a^2b+3ab^2 \pm b^3$ $a^3 \pm b^3=(a \pm b) \cdot (a^2 \mp ab+b^2)$

$(a \pm b)^4=a^4 \pm 4a^3b+6a^2b^2 \pm 4ab^3+b^4$ $a^4-b^4=(a^2-b^2) \cdot (a^2+b^2)$

Mittelwerte

Arithmetisches Mittel $\dfrac{(a+b)}{2}$; $\dfrac{(a+b+c)}{3}$; $\dfrac{(a+b+c+d)}{4}$; $\dfrac{(a+b+c+d+e)}{5}$; usw.

Geometrisches Mittel $\sqrt{(a \cdot b)}$; $\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$; $\sqrt[4]{a \cdot b \cdot c \cdot d}$; $\sqrt[5]{a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e}$; usw.

Harmonisches Mittel $\dfrac{(2ab)}{(a+b)}$

Teilbarkeitsregeln

Eine natürliche Zahl ist teilbar durch

2, wenn ihre letzte Ziffer eine 0, 2, 4, 6 oder 8 ist,
3, wenn die Quersumme durch 3 teilbar ist,
4, wenn ihre letzten beiden Ziffern eine Zahl ergeben, die durch 4 teilbar ist,
5, wenn ihre letzte Ziffer ein 0 oder 5 ist,
6, wenn sie gerade ist und ihre Quersumme durch 3 teilbar ist,
8, wenn ihre letzten drei Ziffern eine Zahl ergeben, die durch 8 teilbar ist,
9, wenn die Quersumme durch 9 teilbar ist,
10, wenn ihre letzte Ziffer eine 0 ist,
11, wenn ihre **Querdifferenz*** durch 11 teilbar ist,
12, wenn diese durch 3 und durch 4 teilbar ist,
15, wenn diese durch 3 teilbar ist und mit 0 oder 5 endet,
24, wenn diese durch 3 und durch 8 teilbar ist,
25, wenn ihre letzten beiden Ziffern eine Zahl ergeben, die durch 25 teilbar ist,
33, wenn diese durch 3 und durch 11 teilbar ist,
125, wenn ihre letzten drei Ziffern eine Zahl ergeben, die durch 125 teilbar ist.
(125, 250, 375, 500, 625, 750, 875, 000)

* Querdifferenz (Wechselsumme) wird gebildet, indem man die Summe von jeder zweiten Ziffer bildet, dann eine Summe der ausgelassenen Ziffern bildet und die kleinere Zahl von der größeren Zahl abzieht, die Differenz ist die Querdifferenz.

Potenzen

Addieren
Subtrahieren

$$a^m \pm a^n = a^m \pm a^n \qquad a^m \pm b^m = a^m \pm b^m \qquad a^m + a^m = 2a^m$$

$$2a^m - a^m = a^m$$

Multiplizieren

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m \qquad a^m \cdot a^m = a^{2m}$$

$$a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n} \qquad a^{-m} \cdot b^{-m} = (a \cdot b)^{-m} \qquad a^m \cdot a^{-m} = a^0 = 1$$

Dividieren für $m > n$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \qquad \frac{a^m}{a^m} = a^0 = 1$$

Dividieren für $m < n$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \qquad \frac{a^{-m}}{b^{-m}} = \left(\frac{b}{a}\right)^m \qquad \frac{a^m}{a^{-m}} = a^{2m} \qquad \frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m+n}$$

Potenzieren

$$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m \qquad [(a^m)^n]^p = a^{mnp}$$

$$(a^{-m})^{-n} = a^{mn} \qquad (a^m)^{-n} = a^{m(-n)} = a^{-mn}$$

Radizieren

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}$$

Vorzeichen

$$(\pm a)^{2n} = +a^{2n} \qquad (\pm a)^{2n+1} = \pm a^{2n+1}$$

Achtung: $(-4)^2 = -4 \cdot -4 = +4^2 = +16$ aber: $-4^2 = -(4^2) = -16$

Null und negative Exponenten

$$a^0 = 1 \qquad a^{-1} = \frac{1}{a} \qquad a^{-2} = \frac{1}{a^2} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)}$$

Gebrochene Exponenten

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{\frac{-m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \qquad (a^{(\frac{1}{n})})^n = a^{(\frac{1}{n} \cdot n)} = a^1 = a$$

$$\frac{a^{\frac{m}{p}}}{a^{\frac{n}{p}}} = a^{\frac{(m-n)}{p}} = \sqrt[p]{a^{m-n}} \qquad \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Sonderfälle

$$1^n = 1 \qquad (-1)^2 = 1 \qquad (-1)^3 = -1$$

Wurzeln

Hinweis: $\sqrt{x^2} = |x|$

Addieren oder Subtrahieren $\quad a \cdot \sqrt[m]{c} \pm b \cdot \sqrt[m]{c} \;=\; (a \pm b) \cdot \sqrt[m]{c}$ nur gleiche Exponenten und gleiche Radikanten

Multiplizieren $\quad \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b} \qquad \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^{m+n}} \qquad \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{a^2}$

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} \;=\; \left(\sqrt{-a}\right)^2$$

Dividieren $\quad \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\dfrac{a}{b}} \qquad \sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{a} = \dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a^{n-m}}$

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{a} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{a}} = 1 \qquad \frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{x}} \;=\; \sqrt{\frac{ax}{x}} \;=\; \sqrt{a}$$

Potenzieren

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} \qquad \left(\sqrt[m \cdot x]{a}\right)^{n \cdot x} = \left(\sqrt[\frac{m}{x}]{a}\right)^{\frac{n}{x}} = \sqrt[m]{a^n}$$

$$\sqrt{a^2} \;=\; a \qquad \left(\sqrt[m]{a}\right)^m = \sqrt[m]{a^m} = a \qquad \sqrt[3]{a^6} \;=\; a^2$$

Radizieren

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \qquad \sqrt[m]{a \cdot \sqrt[n]{b}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n \cdot b}} = \sqrt[m \cdot n]{a^n \cdot b}$$

Brüche

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \;=\; \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a} \cdot \sqrt{a})} \;=\; \frac{\sqrt{a}}{a}$$

$$\frac{m}{(a+\sqrt{b})} \;=\; \frac{m \cdot (a-\sqrt{b})}{((a+\sqrt{b}) \;\cdot\; (a-\sqrt{b}))} \;=\; \frac{m \cdot (a-\sqrt{b})}{(a^2-b)}$$

$$\frac{a}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})} \;=\; \frac{a \cdot (\sqrt{b}+\sqrt{c})}{((\sqrt{b}-\sqrt{c}) \cdot (\sqrt{b}+\sqrt{c}))} \;=\; \frac{a \cdot (\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(b-c)}$$

$$\frac{x}{\sqrt[4]{x^3}} \;=\; \frac{x}{x^{\frac{3}{4}}} \;=\; \frac{x^{\frac{4}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}} \;=\; x^{\frac{4}{4}-\frac{3}{4}} \;=\; x^{\frac{1}{4}} \;=\; \sqrt[4]{x}$$

$$\frac{x}{\sqrt[3]{x^4}} \;=\; \frac{x}{x^{\frac{4}{3}}} \;=\; \frac{x^{\frac{3}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}} \;=\; x^{\frac{3}{3}-\frac{4}{3}} \;=\; x^{-\frac{1}{3}} \;=\; \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \;=\; \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

Sonderfälle

$$\sqrt{0} = 0 \qquad \sqrt[n]{0} = 0 \qquad \sqrt[-m]{a} \;=\; a^{-\left(\frac{1}{m}\right)} \;=\; \frac{1}{\sqrt[m]{a}} \qquad \sqrt[n \cdot p]{a^{(m \cdot p)}} \;=\; \sqrt[n]{a^m}$$

Lineare Gleichungen

Normalform $ax+b=0$ $x \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$ Lösung: $x = -\frac{b}{a}$

Lineare Funktionen

$y = f(x) = mx + n$ $m, n \in \mathbb{R}$; $m \neq 0$

Nullstelle: $x_0 = -\frac{n}{m}$

Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse: S (0;n)

Quadratische Gleichungen

Allgemeine Form $ax^2+bx+c=0$ $(a,\ b,\ c \in \mathbb{R}; a \neq 0)$

Lösungen, falls $b^2-4ac \geq 0$: $x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{(b^2-4ac)}{4a^2}\right)}$

Normalform $x^2+px+q=0$ $(p,q \in \mathbb{R})$

Lösungen, falls $p^2-4q \geq 0$: $x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$

PQ-Formel; Mitternachtsformel

Diskriminante $D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$

D > 0 : zwei Lösungen; D = 0 : genau eine Lösung; D < 0 : keine Lösung

Sonderfälle $x^2+px=0$ $x_1 = 0$; $x_2 = -p$

$x^2+q=0$ $(q \leq 0)$ $x_1=\sqrt{-q}$; $x_2=-\sqrt{-q}$

Quadratische Funktionen

Allgemeine Form $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

Nullstellen der Funktion : $x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{(b^2-4ac)}{4a^2}\right)}$

Scheitelpunkt der Graphen : $S\left(-\frac{b}{2a};\frac{(4ac-b^2)}{4a}\right)$

Normalform $y = f(x) = x^2 + px + q$

Nullstellen der Funktion : $x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ PQ-Formel; Mitternachtsformel

Scheitelpunkt der Graphen : $S\left(-\frac{p}{2};\ q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right)$

Diskriminante : $D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$

D > 0 : zwei Nullstellen; D = 0 : eine Nullstelle; D < 0 : keine Nullstelle

Sonderfälle und deren Scheitelpunkte

$y = x^2$ S(0;0)	$y = (x + d)^2$ S(-d;0)	$y = (x + d)^2 + e$ S(-d;e)
$y = x^2 + d$ S(0;d)	$y = (x - d)^2$ S(d;0)	$y = (x - d)^2 + e$ S(d;e)

Ableitungsregeln für Funktionen

Name	Funktion	Ableitung
Lineare Funktion-Regel	$f(x) = m \cdot x + b$ $f(x) = x$	$f'(x) = m$ $f'(x) = 1$
Konstanten-Regel	$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
Potenzregel (Hut-ab-Regel)	$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
Faktor-Potenzregel	$f(x) = a \cdot x^n$	$f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$
Funkt.- u. Konst.regel	$f(x) = g(x) + c$	$f'(x) = g'(x)$
Summenregel	$f(x) = g(x) \pm h(x)$	$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
Faktorregel	$f(x) = c \cdot v(x)$	$f'(x) = c \cdot v'(x)$
Produktregel	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
Quotientenregel	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$
Wurzelfunktionsregel	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{(2 \cdot \sqrt{x})}$
Exponentialfunktionsregel	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
(natürl.) Logarithmusfunktionsregel	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
Kettenregel	$f(x) = g[h(x)]$	$f'(x) = g'[h(x)] \cdot h'(x)$

$y = g[h(x)]$ ist eine aus $g(h)$ und $h(x)$ zusammengesetzte Funktion

weitere Ableitungen	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\left(\frac{1}{x^2}\right)$
	$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$	$f'(x) = -n \cdot x^{(-n-1)} = \frac{-n}{x^{n+1}}$
Sonderfälle	$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$
	$f(x) = a^{g(x)}$	$f'(x) = a^{g(x)} \cdot g'(x) \cdot \ln a$
	$f(x) = g(x)^{h(x)}$	$f'(x) = g(x)^{h(x)} \cdot (h'(x) \cdot \ln g(x) + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}$
	$f(x) = x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x * \ln x}$	$f'(x) = e^{x * \ln x} \cdot (\ln x + 1)$

(Beachte: Jede positive Zahl ist als Potenz zur Basis e darstellbar! Also: $x = e^{\ln x}$)

Intervalle

Man unterscheidet zwischen endlichen Intervallen und unendlichen Intervallen.

Endliche Intervalle

...bestehen aus allen reellen Zahlen, die zwischen zwei Grenzen liegen. Dabei können die Randpunkte dazugenommen (= abgeschlossenes Intervall) oder weggelassen (= offenes Intervall) werden. (Es gilt $a < b$.)

$[a;b] = \{x \mid a <= x <= b\}$	abgeschlossenes Intervall
$(a;b) = \{x \mid a < x < b\}$	offenes Intervall
$[a;b) = \{x \mid a <= x < b\}$	halboffenes Intervall
$(a;b] = \{x \mid a < x <= b\}$	halboffenes Intervall

Unendliche Intervalle

... sind in mindestens einer Richtung nicht beschränkt.

$(-\infty;b] = \{x \mid x <= b\}$	nach oben beschränkt und abgeschlossen
$(-\infty;b) = \{x \mid x = b\}$	nach oben beschränkt und offen
$[a;+\infty) = \{x \mid x >= a\}$	nach unten beschränkt und abgeschlossen
$(a;+\infty) = \{x \mid x > a\}$	nach unten beschränkt und offen
$(-\infty;+\infty) = \mathbb{R}$	nach beiden Seiten unbeschränkt

Der Betrag einer reellen Zahl

Unter dem Betrag einer reellen Zahl versteht man den Abstand dieser Zahl vom Nullpunkt. Da Abstände nicht negativ sind, sind auch Beträge nicht negativ. So haben z. B. die beiden Zahlen -6 und 6 den gleichen Betrag 6.

$$|a| = \{a, \text{falls } a \geq 0\}$$

$$|a| = \{-a, \text{falls } a < 0\}$$

Für den Betrag gelten folgende Eigenschaften:

$|-a| = |a|$

$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

$-|a| <= a <= |a|$

$|a+b| <= |a| + |b|$

$|a-b|$ stellt auf dem Zahlenstrahl den **Abstand** der beiden Zahlen a und b voneinander dar.

Kurvendiskussion in 10 Schritten

(mit Hinweisen zur Untersuchung und Formulierungshilfen)

1. Definitionsbereich

- Beispiel: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{ 5/2 \}$ Definitionsbereich der reellen Zahlen, außer 5/2
- Hinweis: bei gebrochen rationalen Funktionen darf der Nenner nicht 0 werden

2. Symmetrie

- Achsensymmetrie zur Ordinate (y-Achse), wenn f(-x) = f(x) (Bsp: quadratische Funktionen)
- Punktsymmetrie zum Ursprung, wenn f(-x) = -f(x) für alle x (Bsp: kubische Fkt.)
- keine Symmetrie erkennbar (Beispiele: Exponentialfunktionen)

3. Nullstellen = Schnittpunkt mit der x-Achse

- Grundfunktion gleich Null (y=0) setzen, nach x auflösen, oder PQ-Formel

4. Stetigkeit

- alle Polynome $f(x) = a_n x^n + ... + a_o$ sind in $\mathbb{R}$ stetig
- alle gebrochen-rationalen Funktionen $f(x) = \dfrac{a_n x^n + ... + a_o}{b_m x^m + ... + b_o}$ sind in $\mathbb{R}$ stetig, mit Ausnahme der Nullstellen des Nenners

5. Differenzierbarkeit

f ist im Allgemeinen im gesamten Definitionsbereich stetig differenzierbar, ebenso die höheren Ableitungen.

6. Extremwerte = Berechnung der Hochpunkte, Tiefpunkte

- 1. Ableitung der Funktion bilden $f(x) \Rightarrow f'(x)$
- Ableitung gleich Null setzen, nach x auflösen, oder PQ-Formel $f'(x) = 0$
- in die Grundfunktion die erhaltenen x-Werte einsetzen um die y-Werte zu erhalten
- Vorzeichen der 2. Ableitung an den gefundenen stationären Stellen prüfen
  - $f''(x) > 0$ => relatives Minimum
  - $f''(x) < 0$ => relatives Maximum

7. Wendepunkte = Extremwerte der 1. Ableitung = Nullstellen der 2. Ableitung

- 2. Ableitung der Grundfunktion bilden
- Ableitung gleich Null (y=0) setzen, nach x auflösen, oder PQ-Formel
- in die Grundfunktion die erhaltenen x-Werte einsetzen um die y-Werte zu erhalten
- an den gefundenen Stellen das Vorzeichen der 3. Ableitung prüfen
  - $f'''(x_0) > 0$ => konkav/konvex-Wendepunkt (Hinweis: /\/)
  - $f'''(x_0) < 0$ => konvex/konkav-Wendepunkt (Hinweis: \/\ )

8. Monotonie und Krümmung

Monotonie

- zwischen den Nullstellen der 1. Ableitung ist die Grundfunktion steigend/fallend
- befindet sich die 1.Ableitung im positiven Bereich (y'>0) dann ist die Funktion monoton wachsend
- befindet sich die 1. Ableitung im negativen Bereich (y'<0) dann ist die Funktion monoton fallend

Krümmung

- befindet sich die 2. Ableitung im positiven Bereich (y''>0) dann ist die Funktion konvex (Hinweis: \/)
- befindet sich die 2. Ableitung im negativen Bereich (y''<0) dann ist die Funktion konkav (Hinweis: /\ )

9. Verhalten am Rand des Definitionsbereiches bzw. für $x \to \pm\infty$

- ist der Def.-bereich nach beiden Seiten unbeschränkt, muss $x \to \pm\infty$ untersucht werden

10. Darstellung der Funktion (Graph von f) im Koordinatensystem

Fakultäten und deren Kehrwerte (Auswahl)

n	n!	$\frac{1}{n!}$
0	1	1
1	1	1
2	2	0,5
3	6	0,166666666666667
4	24	0,041666666666667
5	120	0,008333333333333
6	720	0,001388888888889
7	5.040	0,000198412698413
8	40.320	0,0000248015873015873
9	362.880	0,00000275573192239859
10	3.628.800	0,00000027557319223986
11	39.916.800	0,00000002505210838544
12	479.001.600	0,00000000208767569879
13	6.227.020.800	1,605904383682160E-010
14	87.178.291.200	1,147074559772970E-011
15	1.307.674.368.000	7,647163731819820E-013
16	20.922.789.888.000	4,779477332387390E-014
17	355.687.428.096.000	2,811457254345520E-015
18	6.402.373.705.728.000	1,561920696858620E-016
19	121.645.100.408.832.000	8,220635246624330E-018
20	2.432.902.008.176.640.000	4,110317623312170E-019

Zahlwörter (Auswahl) - Besondere Bezeichnungen für Zehnerpotenzen

Beispiel: die Angabe eine Billion US-Dollar in der amerikanischen Literatur entspricht einer Milliarde US-Dollar in der deutschen Literatur.

USA, Brasilien, teilw. Russland, teilw. Türkei, Großbritannien	Deutschland und alle anderen Länder	Herleitung	Zehnerpotenz	Zahl
Eins	Eins	10^{6*0}	10^0	1
Tausend	Tausend		10^3	1 000
Million	Million	10^{6*1}	10^6	1 000 000
Billion	Milliarde		10^9	1 000 000 000
Trillion	Billion	10^{6*2}	10^{12}	1 000 000 000 000
Quadrillion	Billiarde		10^{15}	1 000 000 000 000 000
Quintillion	Trillion	10^{6*3}	10^{18}	1 000 000 000 000 000 000
Sextillion	Trilliarde		10^{21}	1 000 000 000 000 000 000 000
Septillion	Quadrillion	10^{6*4}	10^{24}	1 000 000 000 000 000 000 000 000
Oktillion	Quadrilliarde		10^{27}	auf die Angabe wird verzichtet
Nonillion	Quintillion	10^{6*5}	10^{30}	auf die Angabe wird verzichtet
Dezillion	Quintilliarde		10^{33}	auf die Angabe wird verzichtet

Die 11. Generalkonferenz für Maß und Gewicht, das höchste Organ der Meterkonvention, also des SI-Systems, empfiehlt seit 1960 international den Gebrauch der "langen Leiter" (entspricht den deutschen Zahlwörtern).
Hinweis zur Größenvorstellung: Das Gesamtgewicht der Erde beträgt etwa $5{,}974 \cdot 10^{24}$ kg.

Das unbestimmte Integral

... ermittelt aus der Kenntnis der ersten Ableitung f' die zugehörige Original- oder Stammfunktion f, also die Umkehrung des aus der Differentialrechnung bekannten Ableitungsprozesses.
Die **Grundintegrale** ergeben sich aus der Ableitungstabelle auf Seite 10 durch "rückwärtslesen".

$$\int b\ dx = bx + C \qquad \int 0\ dx = C$$

C = Konstante
a, b, c, m, n = Zahlen
x = Variable

$$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (a > 0;\ a \neq 1)$$

$$\int (ax+b)^n\ dx = \frac{1}{a} * \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x}\ dx = \ln x + C \quad \text{wenn } x > 0$$
$$= \ln(-x) + C \quad \text{wenn } x < 0$$

$$\int \frac{1}{x-a}\ dx = \ln|x-a| + C$$

$$\int \frac{1}{x^n}\ dx = -\frac{1}{(n-1)*x^{n-1}} + C \qquad n > 1;\ x \neq 0$$

$$\int \frac{1}{ax+b}\ dx = \frac{1}{a} * \ln(ax+b) + C \quad \text{wenn } ax + b > 0;\ a \neq 0$$

$$= \frac{1}{a} * \ln(-ax-b) + C \quad \text{wenn } ax + b < 0;\ a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x}\ dx = \int x^{1/2}\ dx = \frac{2}{3} * \sqrt{x^3} + C$$

$$\int \sqrt[n]{x^m}\ dx = \frac{n}{m+n} * \sqrt[n]{x^{m+n}} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx = 2*\sqrt{x} + C$$

$$\int e^x\ dx = e^x + C$$

$$\int e^{ax+b}\ dx = \frac{1}{a} * e^{ax+b} + C \qquad a \neq 0$$

$$\int \ln x\ dx = x * \ln x - x + C$$

$$\int \frac{(\ln x)^n}{x}\ dx = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 \pm x^2}}{x}\ dx = \sqrt{a^2 \pm x^2} - a * \ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 \pm x^2}}{x}\right| + C \qquad x < a \text{ für Vorzeichen "-"}$$

$$\int \frac{x^{n-1}}{x^n + a}\ dx = \frac{1}{n} * \ln|x^n + a| + C$$

$$\int e^{-0,1t}\ dt = -10 * e^{-0,1t} + C$$

$$\int (2x)^4\ dx = \frac{1}{2} * \frac{(2x)^5}{5} + C$$

Rechenregeln

Integration einer mit einem konstanten Faktor multilpizierten Funktion f
$$\int C * f(x)\, dx = C * \int f(x)\, dx$$

Integration einer Summe zweier Funktionen
$$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$
$$\int [a * f(x) \pm b * g(x)]\, dx = a * \int f(x)\, dx \pm b * \int g(x)\, dx$$

Logarithmentafeln

Stehen Taschenrechner, Rechenstäbe o.ä. für Multiplikations- oder Divisionsaufgaben nicht zur Verfügung, kann man sich mit der Tabelle der dekadischen Logarithmen behelfen.

Aufgabe: 46,8 : 9,4 = ?

Für die Zahlen der Aufgabe werden die dekadischen Logaritmen bestimmt. Für eine Division werden beide Logarithmen subtrahiert. Vor dem Komma befindet sich die Stellenzahl (Zehnerpotenz). Nach dem Komma befindet sich die Ziffernfolge aus der Tabelle.

lg 46,8 = 1,6702 lg 9,4 = 0,9731

1,6702 - 0,9731 = 0,6971 ergibt durch zurücklesen aus der Tabelle

= 4,98

Für eine Multiplikationsaufgabe werden die ermittelten Logarithmen addiert.

Aufgabe: 12.400 * 2,7 = ?

lg 12.400 = 4,0934 lg 2,7 = 0,4314

4,0934 + 0,4314 = 4,5248

das ergibt durch zurücklesen aus der Tabelle

"knappe" 33.500,

die jeweils letzten Ziffern der ursprünglichen Aufgabe außer 0 multipliziert ergibt 4 * 7 = 28

also lautet das richtige Ergebnis mit der 8 als letzte Ziffer außer 0:

= 33.480

Hinweis für die Stellenzahl:

Stellenzahl -1 (10^{-1})	für Zahlen von 0,1 ... 1	Bsp:	lg 0,468	= 0,6702-1
Stellenzahl 0 (10^{0})	für Zahlen von 1 ... 10	Bsp:	lg 4,68	= 0,6702
Stellenzahl 1 (10^{1})	für Zahlen von 10 ... 100	Bsp:	lg 46,8	= 1,6702
Stellenzahl 2 (10^{2})	für Zahlen von 100 ... 1000	Bsp:	lg 468	= 2,6702
Stellenzahl 3 (10^{3})	für Zahlen von 1000 ... 10.000	Bsp:	lg 4680	= 3,6702
Stellenzahl 4 (10^{4})	für Zahlen von 10.000 ... 100.000	Bsp:	lg 46.800	= 4,6702
Stellenzahl 5 (10^{5})	für Zahlen von 100.000 ... 1.000.000	Bsp:	lg 468.000	= 5,6702
Stellenzahl 6 (10^{6})	für Zahlen von 1.000.000 ... 10.000.000	Bsp:	lg 4.680.000	= 6,6702

Tafel der dekadischen Logarithmen (Basis 10) lg

	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0		-1,0000	-0,6990	-0,5229	-0,3979	-0,3010	-0,2218	-0,1549	-0,0969	-0,0458
1	0,0000	0,0414	0,0792	0,1139	0,1461	0,1761	0,2041	0,2304	0,2553	0,2788
2	0,3010	0,3222	0,3424	0,3617	0,3802	0,3979	0,4150	0,4314	0,4472	0,4624
3	0,4771	0,4914	0,5051	0,5185	0,5315	0,5441	0,5563	0,5682	0,5798	0,5911
4	0,6021	0,6128	0,6232	0,6335	0,6435	0,6532	0,6628	0,6721	0,6812	0,6902
5	0,6990	0,7076	0,7160	0,7243	0,7324	0,7404	0,7482	0,7559	0,7634	0,7709
6	0,7782	0,7853	0,7924	0,7993	0,8062	0,8129	0,8195	0,8261	0,8325	0,8388
7	0,8451	0,8513	0,8573	0,8633	0,8692	0,8751	0,8808	0,8865	0,8921	0,8976
8	0,9031	0,9085	0,9138	0,9191	0,9243	0,9294	0,9345	0,9395	0,9445	0,9494
9	0,9542	0,9590	0,9638	0,9685	0,9731	0,9777	0,9823	0,9868	0,9912	0,9956
10	1,0000	1,0043	1,0086	1,0128	1,0170	1,0212	1,0253	1,0294	1,0334	1,0374
11	1,0414	1,0453	1,0492	1,0531	1,0569	1,0607	1,0645	1,0682	1,0719	1,0755
12	1,0792	1,0828	1,0864	1,0899	1,0934	1,0969	1,1004	1,1038	1,1072	1,1106
13	1,1139	1,1173	1,1206	1,1239	1,1271	1,1303	1,1335	1,1367	1,1399	1,1430
14	1,1461	1,1492	1,1523	1,1553	1,1584	1,1614	1,1644	1,1673	1,1703	1,1732
15	1,1761	1,1790	1,1818	1,1847	1,1875	1,1903	1,1931	1,1959	1,1987	1,2014
16	1,2041	1,2068	1,2095	1,2122	1,2148	1,2175	1,2201	1,2227	1,2253	1,2279
17	1,2304	1,2330	1,2355	1,2380	1,2405	1,2430	1,2455	1,2480	1,2504	1,2529
18	1,2553	1,2577	1,2601	1,2625	1,2648	1,2672	1,2695	1,2718	1,2742	1,2765
19	1,2788	1,2810	1,2833	1,2856	1,2878	1,2900	1,2923	1,2945	1,2967	1,2989
20	1,3010	1,3032	1,3054	1,3075	1,3096	1,3118	1,3139	1,3160	1,3181	1,3201
21	1,3222	1,3243	1,3263	1,3284	1,3304	1,3324	1,3345	1,3365	1,3385	1,3404
22	1,3424	1,3444	1,3464	1,3483	1,3502	1,3522	1,3541	1,3560	1,3579	1,3598
23	1,3617	1,3636	1,3655	1,3674	1,3692	1,3711	1,3729	1,3747	1,3766	1,3784
24	1,3802	1,3820	1,3838	1,3856	1,3874	1,3892	1,3909	1,3927	1,3945	1,3962
25	1,3979	1,3997	1,4014	1,4031	1,4048	1,4065	1,4082	1,4099	1,4116	1,4133
26	1,4150	1,4166	1,4183	1,4200	1,4216	1,4232	1,4249	1,4265	1,4281	1,4298
27	1,4314	1,4330	1,4346	1,4362	1,4378	1,4393	1,4409	1,4425	1,4440	1,4456
28	1,4472	1,4487	1,4502	1,4518	1,4533	1,4548	1,4564	1,4579	1,4594	1,4609
29	1,4624	1,4639	1,4654	1,4669	1,4683	1,4698	1,4713	1,4728	1,4742	1,4757
30	1,4771	1,4786	1,4800	1,4814	1,4829	1,4843	1,4857	1,4871	1,4886	1,4900
31	1,4914	1,4928	1,4942	1,4955	1,4969	1,4983	1,4997	1,5011	1,5024	1,5038
32	1,5051	1,5065	1,5079	1,5092	1,5105	1,5119	1,5132	1,5145	1,5159	1,5172
33	1,5185	1,5198	1,5211	1,5224	1,5237	1,5250	1,5263	1,5276	1,5289	1,5302
34	1,5315	1,5328	1,5340	1,5353	1,5366	1,5378	1,5391	1,5403	1,5416	1,5428
35	1,5441	1,5453	1,5465	1,5478	1,5490	1,5502	1,5514	1,5527	1,5539	1,5551
36	1,5563	1,5575	1,5587	1,5599	1,5611	1,5623	1,5635	1,5647	1,5658	1,5670
37	1,5682	1,5694	1,5705	1,5717	1,5729	1,5740	1,5752	1,5763	1,5775	1,5786
38	1,5798	1,5809	1,5821	1,5832	1,5843	1,5855	1,5866	1,5877	1,5888	1,5899
39	1,5911	1,5922	1,5933	1,5944	1,5955	1,5966	1,5977	1,5988	1,5999	1,6010
40	1,6021	1,6031	1,6042	1,6053	1,6064	1,6075	1,6085	1,6096	1,6107	1,6117
41	1,6128	1,6138	1,6149	1,6160	1,6170	1,6180	1,6191	1,6201	1,6212	1,6222
42	1,6232	1,6243	1,6253	1,6263	1,6274	1,6284	1,6294	1,6304	1,6314	1,6325
43	1,6335	1,6345	1,6355	1,6365	1,6375	1,6385	1,6395	1,6405	1,6415	1,6425
44	1,6435	1,6444	1,6454	1,6464	1,6474	1,6484	1,6493	1,6503	1,6513	1,6522
45	1,6532	1,6542	1,6551	1,6561	1,6571	1,6580	1,6590	1,6599	1,6609	1,6618
46	1,6628	1,6637	1,6646	1,6656	1,6665	1,6675	1,6684	1,6693	1,6702	1,6712
47	1,6721	1,6730	1,6739	1,6749	1,6758	1,6767	1,6776	1,6785	1,6794	1,6803
48	1,6812	1,6821	1,6830	1,6839	1,6848	1,6857	1,6866	1,6875	1,6884	1,6893
49	1,6902	1,6911	1,6920	1,6928	1,6937	1,6946	1,6955	1,6964	1,6972	1,6981
50	1,6990	1,6998	1,7007	1,7016	1,7024	1,7033	1,7042	1,7050	1,7059	1,7067

Tafel der dekadischen Logarithmen (Basis 10) lg

	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
51	1,7076	1,7084	1,7093	1,7101	1,7110	1,7118	1,7126	1,7135	1,7143	1,7152
52	1,7160	1,7168	1,7177	1,7185	1,7193	1,7202	1,7210	1,7218	1,7226	1,7235
53	1,7243	1,7251	1,7259	1,7267	1,7275	1,7284	1,7292	1,7300	1,7308	1,7316
54	1,7324	1,7332	1,7340	1,7348	1,7356	1,7364	1,7372	1,7380	1,7388	1,7396
55	1,7404	1,7412	1,7419	1,7427	1,7435	1,7443	1,7451	1,7459	1,7466	1,7474
56	1,7482	1,7490	1,7497	1,7505	1,7513	1,7520	1,7528	1,7536	1,7543	1,7551
57	1,7559	1,7566	1,7574	1,7582	1,7589	1,7597	1,7604	1,7612	1,7619	1,7627
58	1,7634	1,7642	1,7649	1,7657	1,7664	1,7672	1,7679	1,7686	1,7694	1,7701
59	1,7709	1,7716	1,7723	1,7731	1,7738	1,7745	1,7752	1,7760	1,7767	1,7774
60	1,7782	1,7789	1,7796	1,7803	1,7810	1,7818	1,7825	1,7832	1,7839	1,7846
61	1,7853	1,7860	1,7868	1,7875	1,7882	1,7889	1,7896	1,7903	1,7910	1,7917
62	1,7924	1,7931	1,7938	1,7945	1,7952	1,7959	1,7966	1,7973	1,7980	1,7987
63	1,7993	1,8000	1,8007	1,8014	1,8021	1,8028	1,8035	1,8041	1,8048	1,8055
64	1,8062	1,8069	1,8075	1,8082	1,8089	1,8096	1,8102	1,8109	1,8116	1,8122
65	1,8129	1,8136	1,8142	1,8149	1,8156	1,8162	1,8169	1,8176	1,8182	1,8189
66	1,8195	1,8202	1,8209	1,8215	1,8222	1,8228	1,8235	1,8241	1,8248	1,8254
67	1,8261	1,8267	1,8274	1,8280	1,8287	1,8293	1,8299	1,8306	1,8312	1,8319
68	1,8325	1,8331	1,8338	1,8344	1,8351	1,8357	1,8363	1,8370	1,8376	1,8382
69	1,8388	1,8395	1,8401	1,8407	1,8414	1,8420	1,8426	1,8432	1,8439	1,8445
70	1,8451	1,8457	1,8463	1,8470	1,8476	1,8482	1,8488	1,8494	1,8500	1,8506
71	1,8513	1,8519	1,8525	1,8531	1,8537	1,8543	1,8549	1,8555	1,8561	1,8567
72	1,8573	1,8579	1,8585	1,8591	1,8597	1,8603	1,8609	1,8615	1,8621	1,8627
73	1,8633	1,8639	1,8645	1,8651	1,8657	1,8663	1,8669	1,8675	1,8681	1,8686
74	1,8692	1,8698	1,8704	1,8710	1,8716	1,8722	1,8727	1,8733	1,8739	1,8745
75	1,8751	1,8756	1,8762	1,8768	1,8774	1,8779	1,8785	1,8791	1,8797	1,8802
76	1,8808	1,8814	1,8820	1,8825	1,8831	1,8837	1,8842	1,8848	1,8854	1,8859
77	1,8865	1,8871	1,8876	1,8882	1,8887	1,8893	1,8899	1,8904	1,8910	1,8915
78	1,8921	1,8927	1,8932	1,8938	1,8943	1,8949	1,8954	1,8960	1,8965	1,8971
79	1,8976	1,8982	1,8987	1,8993	1,8998	1,9004	1,9009	1,9015	1,9020	1,9025
80	1,9031	1,9036	1,9042	1,9047	1,9053	1,9058	1,9063	1,9069	1,9074	1,9079
81	1,9085	1,9090	1,9096	1,9101	1,9106	1,9112	1,9117	1,9122	1,9128	1,9133
82	1,9138	1,9143	1,9149	1,9154	1,9159	1,9165	1,9170	1,9175	1,9180	1,9186
83	1,9191	1,9196	1,9201	1,9206	1,9212	1,9217	1,9222	1,9227	1,9232	1,9238
84	1,9243	1,9248	1,9253	1,9258	1,9263	1,9269	1,9274	1,9279	1,9284	1,9289
85	1,9294	1,9299	1,9304	1,9309	1,9315	1,9320	1,9325	1,9330	1,9335	1,9340
86	1,9345	1,9350	1,9355	1,9360	1,9365	1,9370	1,9375	1,9380	1,9385	1,9390
87	1,9395	1,9400	1,9405	1,9410	1,9415	1,9420	1,9425	1,9430	1,9435	1,9440
88	1,9445	1,9450	1,9455	1,9460	1,9465	1,9469	1,9474	1,9479	1,9484	1,9489
89	1,9494	1,9499	1,9504	1,9509	1,9513	1,9518	1,9523	1,9528	1,9533	1,9538
90	1,9542	1,9547	1,9552	1,9557	1,9562	1,9566	1,9571	1,9576	1,9581	1,9586
91	1,9590	1,9595	1,9600	1,9605	1,9609	1,9614	1,9619	1,9624	1,9628	1,9633
92	1,9638	1,9643	1,9647	1,9652	1,9657	1,9661	1,9666	1,9671	1,9675	1,9680
93	1,9685	1,9689	1,9694	1,9699	1,9703	1,9708	1,9713	1,9717	1,9722	1,9727
94	1,9731	1,9736	1,9741	1,9745	1,9750	1,9754	1,9759	1,9763	1,9768	1,9773
95	1,9777	1,9782	1,9786	1,9791	1,9795	1,9800	1,9805	1,9809	1,9814	1,9818
96	1,9823	1,9827	1,9832	1,9836	1,9841	1,9845	1,9850	1,9854	1,9859	1,9863
97	1,9868	1,9872	1,9877	1,9881	1,9886	1,9890	1,9894	1,9899	1,9903	1,9908
98	1,9912	1,9917	1,9921	1,9926	1,9930	1,9934	1,9939	1,9943	1,9948	1,9952
99	1,9956	1,9961	1,9965	1,9969	1,9974	1,9978	1,9983	1,9987	1,9991	1,9996
100	2,0000	2,0004	2,0009	2,0013	2,0017	2,0022	2,0026	2,0030	2,0035	2,0039